

OPCIÓN A

A.1.- a) (0'5 puntos) El determinante de la matriz **A** que aparece a continuación es 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin utilizar la regla de Sarrus, determine cuanto vale el determinante de la matriz **B** siguiente: (enuncie las

propiedades que utilice) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) (2 puntos) Sea **C** la siguiente matriz: $C = \begin{pmatrix} \text{sen}(x) & -\text{cos}(x) & 0 \\ \text{cos}(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ 1 & \text{sen}(x) & x \end{pmatrix}$

a)

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+1 \\ 1 & 2 & 1+3 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0+1 \\ 1 & 2 & 2+1 \\ 0 & -1 & -1+0 \end{vmatrix} = 2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0+1 \\ 1 & 2 & 2+1 \\ 0 & -1 & -1+0 \end{vmatrix} \\ &= 2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0+1 \\ 1 & 2 & 2+1 \\ 0 & -1 & -1+0 \end{vmatrix} = 2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

b)

$$|C| = \begin{vmatrix} \text{sen}(x) & -\text{cos}(x) & 0 \\ \text{cos}(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ 1 & \text{sen}(x) & x \end{vmatrix} = x \text{sen}^2(x) + x \text{cos}^2(x) = x [\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x)] = x \cdot 1 = x \Rightarrow \text{Si } |C| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow |C| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } C^{-1} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot (\text{adj } C^t) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen}(x) & \text{cos}(x) & 1 \\ -\text{cos}(x) & \text{sen}(x) & \text{sen}(x) \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } C^t = \begin{pmatrix} x \text{sen}(x) & x \text{cos}(x) & 0 \\ -x \text{cos}(x) & x \text{sen}(x) & 0 \\ \text{cos}(x)\text{sen}(x) - \text{sen}(x) & -(\text{sen}^2 x + \text{cos } x) & \text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) \end{pmatrix} =$$

$$\text{adj } C^t = \begin{pmatrix} x \text{sen}(x) & x \text{cos}(x) & 0 \\ -x \text{cos}(x) & x \text{sen}(x) & 0 \\ [\text{cos}(x) - 1]\text{sen}(x) & -(\text{sen}^2 x + \text{cos } x) & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \begin{pmatrix} x \text{sen}(x) & x \text{cos}(x) & 0 \\ -x \text{cos}(x) & x \text{sen}(x) & 0 \\ [\text{cos}(x) - 1]\text{sen}(x) & -(\text{sen}^2 x + \text{cos } x) & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \begin{pmatrix} x \text{sen}(x) & x \text{cos}(x) & 0 \\ -x \text{cos}(x) & x \text{sen}(x) & 0 \\ [\text{cos}(x) - 1]\text{sen}(x) & -(\text{sen}^2 x + \text{cos } x) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(x) & \text{cos}(x) & 0 \\ -\text{cos}(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ \frac{[\text{cos}(x) - 1]\text{sen}(x)}{x} & -\frac{\text{sen}^2 x + \text{cos } x}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

A.2.- Dado el punto $P(1, 0, 6)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- a) (1 punto) Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por P y corta a r
 b) (1'5 puntos) Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que contiene a la recta r

anterior y a la recta $r' : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$

- a) El vector que forma el punto P y el punto R general de la recta r (como si se apoyase en ella) es perpendicular al vector director de la recta y su producto escalar nulo, con esa condición encontraremos el vector director que define a la recta s

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -6, 2) \\ \vec{PR} = (1 + \lambda, -2 - 6\lambda, 2\lambda) - (1, 0, 6) = (\lambda, -2 - 6\lambda, 2\lambda - 6) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{PR} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, -6, 2) \cdot (\lambda, -2 - 6\lambda, 2\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda + 12 + 36\lambda + 4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow 41\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\vec{v}_s = (0, -2 - 6 \cdot 0, 2 \cdot 0 - 6) = (0, -2, -6) \equiv (0, 1, 3) \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 \\ y = \mu \\ z = 6 + 3\mu \end{cases}$$

- b) Para formar un plano las dos rectas tienen que cortarse o ser paralelas, veamos si se cortan

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x = z \\ 2z - y - z = 10 \Rightarrow y = -10 + z \end{cases} \Rightarrow r' : \begin{cases} x = \mu \\ y = -10 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = \mu \\ -2 - 6\lambda = -10 + \mu \Rightarrow 1 + \lambda = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \\ 2\lambda = \mu \end{cases}$$

$$\mu = 1 + 1 = 2 \Rightarrow -2 - 6 \cdot 1 = -10 + 2 \Rightarrow -8 = -8 \Rightarrow \text{Sistema compatible} \Rightarrow$$

$$\text{Son rectas que se cortan en } P \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = -2 - 6 \cdot 1 \Rightarrow P(2, -8, 2) \\ z = 2 \cdot 1 \end{cases}$$

Veamos que no sean coincidentes, porque no generarían un plano, y lo serán si los vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -6, 2) \\ \vec{v}_{r'} = (1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-6}{1} \Rightarrow \text{No son coincidentes} \Rightarrow \text{Son rectas que se cortan en } P(2, -8, 2)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha + \beta \\ y = -8 - 6\alpha + \beta \\ z = 2 + 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+8 & z-2 \\ 1 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-6(x-2) + 2(y+8) + (z-2) + 6(z-2) - 2(x-2) - (y+8) = 0 \Rightarrow -8(x-2) + (y+8) + 7(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 8x - y - 7z - 10 = 0$$

A.3.- Considere las funciones $f(x) = e^{x+1}$ y $g(x) = e^{-x+5}$

- a) (0'5 puntos) Determine los posibles puntos de corte de esas dos funciones
 b) (2 puntos) Calcule el área encerrada entre esas dos funciones y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

a)
No existen puntos de corte de las funciones con el eje OX

$$\text{Puntos de corte con OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = e^{0+1} = e \\ g(0) = e^{-0+5} = e^5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Puntos de corte entre funciones} &\Rightarrow e^{x+1} = e^{-x+5} \Rightarrow \ln e^{x+1} = \ln e^{-x+5} \Rightarrow (x+1) \ln e = (-x+5) \ln e \Rightarrow \\ x+1 &= -x+5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}+1} = e^{\frac{5}{2}} \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}+5} = e^{\frac{7}{2}} \Rightarrow f(x) < g(x) \Rightarrow x \in [1, 2) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{5}{2}\right) = e^{\frac{5}{2}+1} = e^{\frac{7}{2}} \\ g\left(\frac{5}{2}\right) = e^{\frac{5}{2}+5} = e^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f(x) > g(x) \Rightarrow x \in (2, 3] \end{array} \right.$$

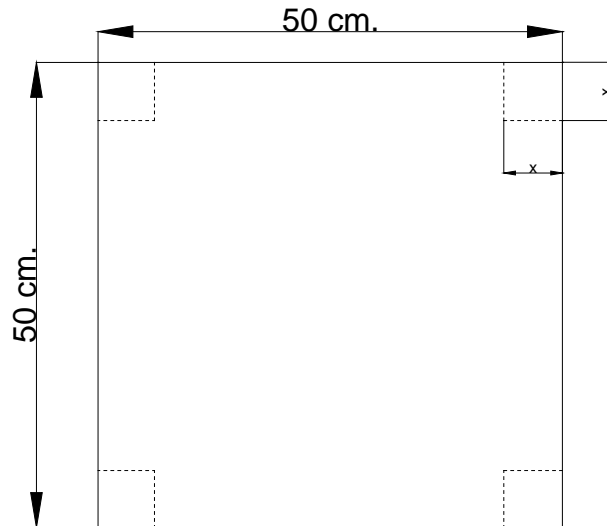
$$A = \int_1^2 e^{-x+5} dx - \int_1^2 e^{x+1} dx + \int_2^3 e^{x+1} dx - \int_2^3 e^{-x+5} dx = - \int_4^3 e^t dt - \int_2^3 e^u du + \int_3^4 e^u du + \int_3^2 e^t dt =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x+5 = t \Rightarrow -dx = dt \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=4 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{cases} \\ x+1 = u \Rightarrow dx = du \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow u=2 \\ x=2 \Rightarrow u=3 \\ x=3 \Rightarrow u=4 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$A = -[e^t]_4^3 - [e^u]_2^3 + [e^u]_3^4 + [e^t]_3^2 = -(e^3 - e^4) - (e^3 - e^2) + (e^4 - e^3) + (e^2 - e^3)$$

$$A = -e^3 + e^4 - e^3 + e^2 + e^4 - e^3 + e^2 - e^3 = 2e^4 - 4e^3 + 2e^2 = 2(e^4 - 2e^3 + e^2)u^2$$

A.4.- (2'5 puntos) Se dispone de una cartulina cuadrada como la del dibujo, cuyo lado mide **50 cm**. En cada una de las esquinas se corta un cuadrado de lado **x** con el fin de poder doblar la cartulina y formar una caja, sin tapa. ¿Cuál debe de ser el lado **x** del cuadrado a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?



$$V = (50 - 2x)^2 x \Rightarrow V' = \frac{dV}{dx} = (50 - 2x)^2 + 2(50 - 2x)(-2)x = (50 - 2x)^2 - 4x(50 - 2x)$$

$$V' = (50 - 2x - 4x)(50 - 2x) = 4(25 - 3x)(25 - x) \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow 4 \cdot (25 - 3x)(25 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 25 - 3x = 0 \Rightarrow 25 = 3x \Rightarrow x = \frac{25}{3} \Rightarrow V'' = 4 \cdot [-3 \cdot (25 - x) - (25 - 3x)] = 4 \cdot (-75 + 3x - 25 + 3x) \\ 25 - x = 0 \Rightarrow x = 25 \end{cases}$$

$$V'' = 4 \cdot (6x - 100) = 8 \cdot (3x - 50) \Rightarrow \begin{cases} V''(25) = 8 \cdot (3 \cdot 25 - 50) = 8 \cdot 25 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ V''\left(\frac{25}{3}\right) = 8 \cdot \left(3 \cdot \frac{25}{3} - 50\right) = 8 \cdot (-25) < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \end{cases}$$

$$x = \frac{25}{3} \text{ cm}$$

OPCIÓN B

B1.- a) (1'5 puntos) Determine para que valores de **m** el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + 6z = 0 \\ 2x + my + 4z = 2 \\ 2x + my + 6z = m - 1 \end{cases} \text{ es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.}$$

b) (1 punto) Se sabe que una matriz simétrica **B** de dimensión 3 x 3 tiene como determinante **-3**. Determine el determinante de la matriz **B + B^t** donde **B^t** denota la traspuesta de **B**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 6m^2 + 16 + 12m - 12m - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2m^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 8$$

$$m^2 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow m = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de ecuaciones} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Deter min ado}$

Si $m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = 9 \\ 5z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{9}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ -2z = 2 \Rightarrow z = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Al ser simétrica la matriz elle y su traspuesta son iguales

$$\text{Como } B = B^t \Rightarrow |B + B^t| = |B + B| = |2B| = 2^3 |B| = 8 \cdot 3 = 24$$

B.2.- a) (1 punto) Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que es paralelo a la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-3}{4} \text{ y que contiene los puntos } \mathbf{P}(1, 1, 1) \text{ y } \mathbf{Q}(3, 5, 0)$$

b) (1'5 puntos) Calcule el ángulo que forman las dos rectas siguientes $r: \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x - z = -4 \end{cases}$

$$r': \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

a) El plano π queda determinado por el vector director de la recta r , por el vector \mathbf{PQ} y por el vector \mathbf{PG} , siendo \mathbf{G} el punto generador del plano pedido.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector \mathbf{PG} es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$r: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-3}{4}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 4) \\ \overrightarrow{PQ} = (3, 5, 0) - (1, 1, 1) = (2, 4, -1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) + 8(y-1) + 8(z-1) - 2(z-1) - 16(x-1) + 2(y-1) = 0 \Rightarrow -17(x-1) + 10(y-1) + 6(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 17x - 10y - 6z - 1 = 0$$

b) Para poder hallar el ángulo que forman dos rectas deben de cortarse en un punto P. Busquemos ese punto

$$\begin{cases} \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \\ r': \begin{cases} x = 3 + 2\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = -5 + 2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 + 2\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 - \mu \\ 4 + 2\lambda = -5 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = 3 \\ 2\lambda + \mu = 3 \\ 2\lambda - 2\mu = -9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -9 - 12 - 12 - 6 + 6 - 36 = -69 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow$$

No se cortan

Solo podremos hallar el ángulo que forman sus **vectores directores**, no las rectas

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_{r'} = (2, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{r'}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_{r'}|} = \frac{|(1, 2, 2) \cdot (2, -1, 2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 2 + 4|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{|4|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{9}\right) = 63^\circ 36' 44''$$

B.3.- a) (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+2} \right)^{3x}$

b) (1'5 puntos) Calcule la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\text{sen}(x)} \text{sen}(x) \cos(x) dx$, usando el cambio de variable

sen(x) = t

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6}{x+2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+2} \right)^{3x} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6}{x+2} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2+4}{x+2} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+2} + \frac{4}{x+2} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x+2} \right)^{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{4}} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{4}} \right)^{\frac{x+2}{4} \cdot \frac{3x}{x+2}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{4}} \right)^{\frac{x+2}{4}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x+2}} = e^{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x+2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{1} = 12$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\text{sen}(x)} \text{sen}(x) \cos(x) dx = \int_0^1 e^t t dt = [t \cdot e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^t]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$$

$$\text{sen}(x) = t \Rightarrow \cos(x) dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = \text{sen} 0 = 0 \end{cases} \quad \text{Por partes} \Rightarrow \begin{cases} t = u \Rightarrow dt = du \\ e^t dt = dv \Rightarrow v = \int e^t dt = e^t \end{cases}$$

B.4.- Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$

a) (0'5 puntos) Determine el dominio de **f(x)**

b) (0'5 puntos) Estudie si la función **f(x)** es continua. Si no lo es determine los puntos de discontinuidad

c) (1'5 puntos) Determine los posibles máximos y mínimos, así como las asíntotas de **f(x)**

a)

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-2) = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ f(3) = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

b)

El analisis se hizo en el apartado a), es discontinua en $x = 3$ y $x = 2$

$$\text{Cuando } x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{1}{(-2^-)^2 - (-2^-) - 6} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{(-2^+)^2 - (-2^+) - 6} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{(3^-)^2 - (3^-) - 6} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{(3^+)^2 - (3^+) - 6} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$$

c)

$$f'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (-1) \frac{(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{2 \cdot (x^2-x-6)^2 - 2(x^2-x-6)(2x-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^4} = -\frac{2 \cdot (x^2-x-6) - 2(2x-1)^2}{(x^2-x-6)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{2x^2 - 2x - 12 - 2(4x^2 - 4x + 1)}{(x^2-x-6)^3} = -\frac{2x^2 - 2x - 12 - 8x^2 + 8x - 2}{(x^2-x-6)^3} = \frac{6x^2 - 6x + 14}{(x^2-x-6)^3}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 14}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 6\right]^3} = \frac{\frac{6}{4} - 3 + 14}{\left(\frac{6}{4} - \frac{1}{2} - 6\right)^3} = \frac{\frac{3}{2} + 11}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 6\right)^3} = \frac{\frac{25}{2}}{(1-6)^3} = \frac{5^2}{2(-5)^3} = -\frac{1}{10} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Continuación Problema B.4 del Bloque B

$$\text{Máximo relativo} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6} = \frac{1}{\frac{1-2-24}{4}} = -\frac{4}{25}$$

Asíntotas verticales

$$\text{Cuando } x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{1}{(-2^-)^2 - (-2^-) - 6} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{(-2^+)^2 - (-2^+) - 6} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Asíntota vertical}$$

$$\text{Cuando } x = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{(3^-)^2 - (3^-) - 6} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{(3^+)^2 - (3^+) - 6} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \text{Asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal, } y = 0, \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal, } y = 0, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2 - x - 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 - x^3 - 6x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - x - 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3 - x^3 - 6x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \rightarrow -\infty$$